Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2016-17
1. Gravitáció, égi mechanika
Megoldások

Dálya Gergely, Csörnyei Géza, Bécsy Bence

2016. október 8.

1. Bemelegítő feladatok

B.1. feladat

Ahhoz, hogy meghatározzuk a Mars pályájának fél nagytengelyét, a legkézenfekvőbb megoldás Kepler III. törvényének használata. A törvény szerint a bolygók a Nap körül olyan ellipszispályán keringenek, amelyre a fél nagytengely és a keringési idő közötti reláció a következő:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{áll.} \tag{1}$$

Ha a fél nagytengelyt csillagászati egységekben (a továbbiakban CsE) mérjük, a keringési időt pedig években, akkor az állandó értéke 1 lesz (a Nap körül keringő égitestekre alkalmazva), ezt legegyszerűbben a Föld adatainak behelyettesítésével láthatjuk. Az egyenletet átrendezve $a = T^{2/3}$-t kapunk, ahova behelyettesítve az Mars keringési idejét (1,88 év) megkapjuk a megoldást: **a = 1,52 CsE**.

B.2. feladat

A geostacionárius műholdak stabil körpályán keringenek a Föld körül, így a rájuk ható erőknek, vagyis a Föld gravitációs erejének és a centripetális erőnek az eredője zérus:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{GM\frac{T^2}{4\pi^2}} = 42227km. \tag{2}$$

Mivel azonban a keringés középpontja a Föld középpontja és nem a felszíne, így ahhoz, hogy a felszíntől vett távolságot kapjuk meg, ebből még le kell vonnunk a Föld sugarát (6371 km). Tehát a geostacionárius műholdak a Föld felszíne felett **35856 km**-rel keringenek.

B.3. feladat

Használjuk a B.1. feladatban is alkalmazott módon Kepler III. törvényét: $T = a^{3/2} = 75,1$ év. Mivel legutóbb 1986-ban volt perihéliumban, a legközelebbi ilyen esemény **2061**-ben várható.

A perihéliumtávolságot megkaphatjuk úgy, hogy az ellipszis fél nagytengelyéből kivonjuk a lineáris excentricitást (az ellipszis középpontja és fókuszpontja közötti távolságot, jelöljük c-vel). A lineáris excentricitást pedig a fél nagytengely és a (numerikus) excentricitás szorzataként számíthatjuk ki, vagyis $c = ae = 17,21$ CsE. A perihéliumtávolság tehát $\boldsymbol{r_p = a - c = 0,587}$ **CsE**.

B.4. feladat

A gravitációs gyorsulás értékét legegyszerűbben Newton II. törvényének felírásával kaphatjuk meg:

$$F = ma = mg = G\frac{mM}{r^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}. \tag{3}$$

Behelyettesítve az egyes égitestek tömegeit és sugarait:

- $\boldsymbol{g_{\mathrm{H}} = 1,62\mathrm{m/s^2}}$
- $\boldsymbol{g_{\mathrm{V}} = 8,87\mathrm{m/s^2}}$
- $\boldsymbol{g_{\mathrm{J}} = 25,93\mathrm{m/s^2}}$
- $\boldsymbol{g_{\odot} = 273,77\mathrm{m/s^2}}$.

2. Nehezebb feladatok

N.1. feladat

A feladat legkézenfekvőbb megoldását Kepler III. törvényének használatával kaphatjuk meg, mely szerint

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$

ahol T a keringési idő, a a pálya fél nagytengelye, γ a gravitációs állandó és M a központi test tömege.

A feladat szerint a sűrűgék arányát csak a keringési idő és a fél nagytengelyek segítségével meg lehet határozni. Legyen $a_n = \alpha_n R_n$ mindkét hold esetére! Írjuk fel a keringési idők hányadosát!

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\frac{a_1^3}{M_1}}{\frac{a_2^3}{M_2}}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^3\frac{R_1^3}{M_1}}{\alpha_2^3\frac{R_2^3}{M_2}}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^3 R_1^3 M_2}{\alpha_2^3 R_2^3 M_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^3\rho_2}{\alpha_2^3\rho_1}}$$

mivel

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}}{\frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}} = \frac{M_1 R_2^3}{M_2 R_1^3}$$

innen pedig már egyértelműen kifejezhető az általunk keresett arány:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

amely a megadott adatok behelyettesítésével:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{42^3}{60.3^3} \cdot \frac{27d7h43m}{24d12h9m} = \mathbf{0,42}.$$

N.2. feladat

A gravitációs gyorsulás értékét a B.4. feladatban megadott módon számíthatjuk ki: $g = GM/r^2$. Az esés idejének kiszámításához pedig írjuk fel a négyzetes úttörvényt:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{GM}{r^2}t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2sr^2}{GM}} \tag{4}$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat, egy 1 m magasból elejtett test (mindegy, hogy kő vagy toll) $\boldsymbol{t = 1,1}$ s alatt esik le a Holdon.

N.3. feladat

1. rész:

   Ahhoz, hogy a műholdnak perigeuma legyen az adott pontban az kell, hogy ne adjunk sugárirányban sebességet neki, és hogy a sebességének nagyságát növeljük (ha csökkentenénk akkor apogeum lenne). Így tehát az új pálya r_p pericentrumtávolsága megegyezik az r_gst geostacionárius pályasugárral. Tudjuk továbbá, hogy:

   $$r_\mathrm{p} = a(1-e), \tag{5}$$

   ahol a a pálya fél nagytengelye, e pedig az excentricitása.

   Így csak az a fél nagytengelyt kell úgy beállítanunk, hogy az adott r_p esetén e excentricitású legyen. Ehhez azt kell tudnunk, hogy az ellipszispályán mozgó részecske redukált energiáját egyértelműen meghatározza a fél nagytengely az alábbi összefüggésen keresztül:

   $$\frac{E}{m} = -\frac{GM}{2a} \tag{6}$$

   Tudjuk továbbá, hogy a műholdunk teljes redukált energiája:

   $$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_\mathrm{gst}} \tag{7}$$

   A kettőt egyenlővé téve, az excentricitásos képletet beírva és rendezve kapjuk, hogy a sebességet az alábbira kell beállítani:

   $$v = \sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{gst}}(1+e)} \tag{8}$$

Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha a jelenlegi sebességével azonos irányban megnöveljük a sebességét az alábbi értékkel:

$$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}}\left(\sqrt{1+e}-1\right)} \tag{9}$$

2. rész:

Lényegében ugyanaz, mint az első rész, csak mivel apogeumban vagyunk, ezért az excentricitást az alábbi képlet adja:

$$r_{\mathrm{a}} = (1+e)a \tag{10}$$

Így látható, hogy mindenhol megváltozik e előjele, így a végeredmény az, hogy az alábbi sebességet kell adnunk a már meglévő sebességhez:

$$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}}\left(\sqrt{1-e}-1\right)} \tag{11}$$

Ez lényegében egy lassítás lesz.

3. rész:

Az 1. rész végképletében $e = 1$-et írva megkapjuk a megoldást, ami az alábbi:

$$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}}\left(\sqrt{2}-1\right)} \tag{12}$$

Azonban tartsuk észben, hogy ez csak a legegyszerűbb megoldás. Bármilyen megfelelő nagyságú, a Föld irányához képest merőleges sebességű eset jó lesz.

4. rész:

Az egyik feltételünk itt az, hogy körpályán maradunk. Ezt úgy tudjuk teljeíteni, hogy a sebesség nagyságát nem változtatjuk, és irányát is csak úgy, hogy ne legyen radiális komponense.

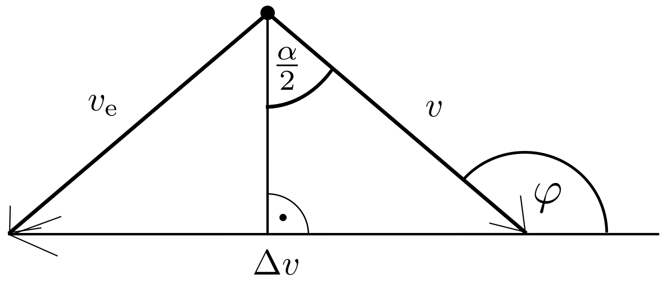
Az 1. ábrát megnézve ez az alábbi módon teljesíthető. Legyen a hozzáadott sebesség nagysága $\boldsymbol{\Delta v = 2v\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, ahol α a kezdeti és eredő sebességek által bezárt szög. Legyen a Δv és a v által bezárt szög φ! Ekkor a v_{e} eredő sebesség $\boldsymbol{\alpha = 2\varphi - 180^\circ}$ szöget zár be a v eredeti sebességgel.

5. rész:

Itt csak egy v-vel megegyező nagyságú sebességet kell kivonnunk v-ből, azaz meg kell állítanunk a pályáján a műholdat. Természetesen eközben adhatunk neki egy tetszőleges sugárirányú sebességet.

6. rész:

Ez a feladat lényegében ugyanaz, mint a 4. rész, csak i-t egyenlővé kell tenni α-val, hiszen a geoszinkron pálya ugyanolyan mint a geostacionárius, csak el van ahhoz képest fordulva.



1. ábra:

N.4. feladat

Feltételezzük, hogy a galaxisok kellően távol vannak tőlünk, így a megadott szökési sebesség a galaxishalmaz tömegközéppontjához van viszonyítva. A szökési sebességet felírjuk az ismert módon:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

ahol γ gravitációs állandó, M a galaxishalmaz össztömege és R a halmaz középpontjától mért távolság.

Ebből kifejezzük a galaxishalmaz össztömegét:

$$M = \frac{v_0^2 R}{2\gamma}$$

majd az így kapott képletet behelyettesítjük a sűrűség ismert képletébe. Ezen képleten belül a térfogatot egy a halmaz középpontjában felvett R sugarú gömkként számoljuk, azaz:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{v_0^2 R}{2\gamma}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{v_0^2}{\frac{8}{3}\pi\gamma R^2} = \mathbf{3.0167 \cdot 10^{-25} \frac{kg}{m^3}}.$$

N.5. feladat

Az excentricitás kiszámításához használjuk a már ismert összefüggéseket a fél nagytengely, a fél kistengely és a lineáris excentricitás között: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5$CsE, ahonnan a (numerikus) excentricitás: $\boldsymbol{e = a/c = 0,385}$. A periasztrontávolság pedig: $\boldsymbol{r_p = a - c =}$ **8 CsE**.

N.6. feladat

A bolygó és a csillag közös tömegközéppont körül keringenek. A csillag távolsága a tömegközépponttól: $x = 4$ CsE $\cdot\, m/M = 4 \cdot 10^{-5}$ CsE $= 6020$ km. Megjegyezzük, hogy ez bőven a csillag sugarán belül van, tehát a csillagot nem fogjuk valóban körpályán keringőnek látni, hanem csak imbolyogni fog. A csillagot az alábbi szöggel látjuk elmozdulni (a 15 fényévet átváltottuk km-be):

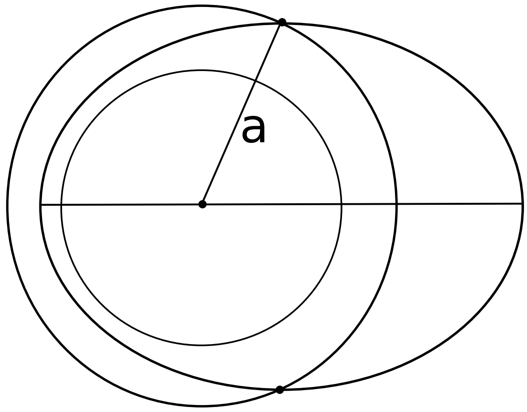
$$\alpha = \left(\frac{6020 \text{ km}}{1,42 \cdot 10^{14} \text{ km}}\right) \approx 10^{-5}\,'' \tag{13}$$

Tehát a csillag modulációja $\mathbf{10^{-5}}$ **ívmásodperc**. Mivel a bolygó körpályán kering a csillag körül, ezért ez a moduláció független a rendszr inklinációjától, vagyis attól, hogy milyen szögben is látunk rá.

3. Diákolimpiai szintű feladatok

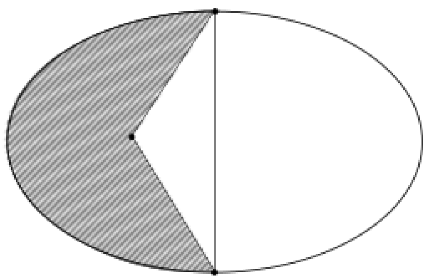
D.1. feladat

Nézzük meg, hogy a pályaellipszis mely részei esnek a lakhatósági zónába! Tudjuk a feladat szövegéből, hogy a lakhatósági zóna külső határa egybeesik a fél nagytengellyel. Az ellipszis definíció szerint olyan pontok halmaza a síkon, amelyeknek a két fókuszponttól mért távolságösszege állandó. Ez az állandó pedig éppen $2a$ (ha ezt nem tudjuk, számítsuk ki a pericentrumra vagy az apocentumra). Az ellipszisen annak középpontja feletti és alatti pont (ld. 2. ábra) emiatt éppen a távolságra lesz mindkét fókusztól, hiszen szimmetrikus az ellipszis, és $2a/2 = a$. Tehát azt már tudjuk, hogy ezen két ponton metszi a lakhatósági zóna külső köre az ellipszist.



2. ábra:

Vajon hol metszi a belső kör? Ellenőrizzük először, hogy metszi-e egyáltalán. Az ellipszisnek a fókuszhoz legközelebbi pontja a pericentum, aminek a távolsága: $r_\mathrm{p} = a-c = a(1-e) = 3,2$ CsE, ez tehát a lakhatósági zónán belül van. A kérdés tehát az, hogy az ellipszisnek a pericentrumhoz közelebbi felét a keringési idő hányad része alatt teszi meg a bolygó. Mivel itt gyorsabban halad Kepler II. törvénye miatt, 50%-nál kisebb értéket várunk.



3. ábra:

Kepler II. törvénye kimondja, hogy a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Használjuk ki ezt! Így csak a 3. ábrán látható bevonalkázott területet kell összehasonlítani az ellipszis teljes területével. A teljes terület: $T = ab = 15,68$ CsE^2 . A háromszög területe (alapja $2b$, magassága c): $T_h = \frac{2bc}{2} = bc = 3,14$ CsE^2 . Innen pedig a vonalkázott terület: $T_v = \frac{T}{2} - T_h = 4,7$ CsE^2 . Ez pedig az eredeti területnek **30%**-a.

D.2. feladat

A megoldás lényege az a felismerés, hogy a fény véges sebessége miatt a Seneca körül keringő űrszonda jeleiből arról kapunk információt, hogy a kisbolygó milyen távol van a Földtől. Így azt az információt adja meg a feladat szövege, hogy mi a legkisebb és legnagyobb távolság ami a Föld és a Seneca között kialakulhat. Számoljuk ki, hogy a medadott időtartamok mekkora távolságnak felelnek meg:

$$d = c\Delta t, \tag{14}$$

ahol d a Seneca távolsága a Földtől, $c = 3 \times 10^8$ m/s a fénysebesség, Δt a rádiójel Földhöz éréséhez szükséges idő. Beírva a feladatban szereplő időket kapjuk, hogy

$$d_{\min} = 0,24 \text{ CsE} \qquad d_{\max} = 4,68 \text{ CsE} \tag{15}$$

(1 CsE$= 1,5 \times 10^{11}$ m)

Ezek alapján a Seneca ellipszispályáját a Föld körpályájához képest fel lehet rajzolni. Ehhez vegyük észre, hogy a Seneca pályája nem metszheti a Föld pályáját, mivel ekkor kialakulhatna olyan helyzet amikor gyakorlatilag 0 perc alatt eléri a Földet a jel. Az pedig, hogy a Seneca pályája a Föld pályáján belül helyezkedjen el azért nem lehetséges, mert a legnagyobb távolság esetén (4,68 CsE) messzebb van a Földtől mint a Föld pályasugarának kétszerese (2 CsE). Ezért tehát arra jutunk, hogy a Seneca pályája a Földpáylán kívül helyezkedik el (lásd 4. ábrát).

Az ábra alapján kifejezhetjük a Seneca pályájának pericentrum távolságát (r_p) és apocentrum távolságát (r_a) a $d_{\min}$ és $d_{\max}$ értékeivel az alábbi módon:

$$r_\text{p} = d_{\min} + 1 \text{ CsE} \qquad r_\text{a} = d_{\max} - 1 \text{ CsE} \tag{16}$$

$$r_\text{p} = 1,24 \text{ CsE} \qquad r_\text{a} = 3,68 \text{ CsE} \tag{17}$$

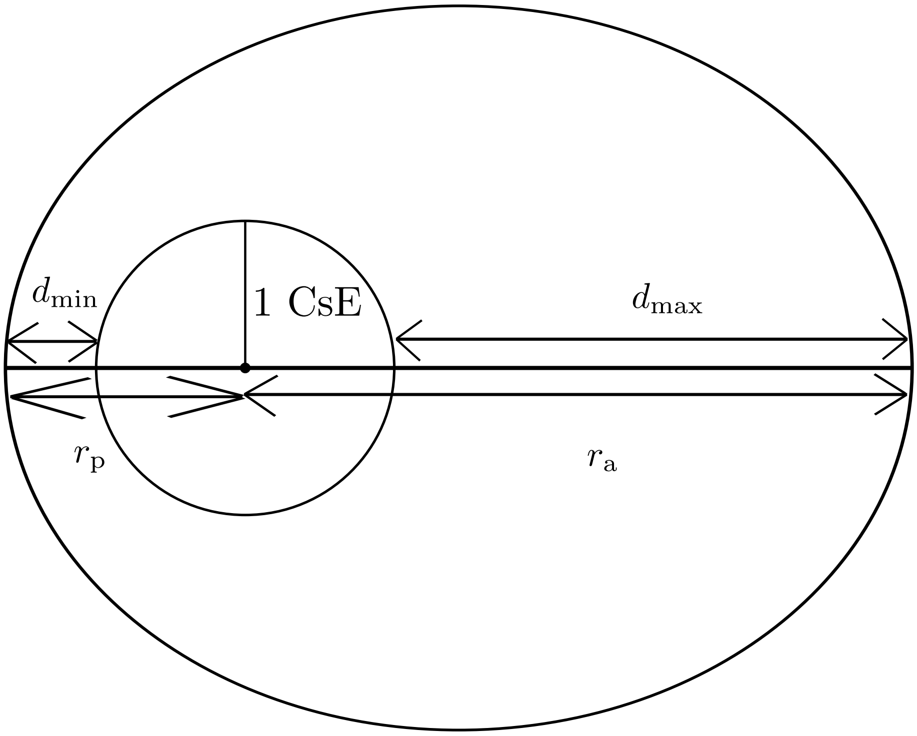
Ezután szeretnénk meghatározni a Seneca pályájának a félnagytengelyét és e excentricitását. Ezt a közel- és távolpontok ismeretében az alábbi összefüggésekkel tehetjük meg:

$$a = \frac{r_\text{p} + r_\text{a}}{2} \tag{18}$$

$$e = 1 - \frac{r_\text{p}}{a} \tag{19}$$

Így a Senecá-ra az alábbi értékeket kapjuk:

$$\mathbf{a = 2,46\ CsE} \qquad \mathbf{e = 0,496} \tag{20}$$



4. ábra:

A félnagytengely ismeretében a pályaperiódust Kepler III. törvénye alapján számolhatjuk ki, ami a Naprendszerre az alábbi alakú, ha csillagászati egységben és évben számolunk:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \tag{21}$$

Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{T = 3,86\ év} \tag{22}$$

A két oppozíció között eltelt időt, úgy kaphatjuk meg, ha kiszámoljuk a Seneca és a Föld relatív átlagos szögsebességét:

$$\omega_{\mathrm{rel}} = \omega_{\mathrm{F}} - \omega_{\mathrm{S}} \tag{23}$$

Beírva, hogy az átlagos szögsebesség $\omega = 2\pi/T$, ahol T a keringési idő és az egész egyenletet 2π-vel osztva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{T_{\mathrm{sid}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{F}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{S}}} \tag{24}$$

Innen a T_{sid} sziderikus keringési időre az alábbi képletet kapjuk:

$$\frac{1}{\frac{1}{1\ \text{év}} - \frac{1}{3{,}86\ \text{év}}} \tag{25}$$

Innen, mivel ez éppen megegyezik a Δt két oppozíció között eltelt idővel, ezért a végeredmény:

$$\boldsymbol{\Delta t = 1,35}\ \textbf{év} \tag{26}$$

D.3. feladat

Tegyük fel, hogy egy átlagos ember kb. 10 méter magasra tud feldobni egy követ a Földön. Írjuk fel az energiamegmaradást: $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$, vagyis $v_0 = \sqrt{2gh} = 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-os kezdősebességet tudunk adni a kőnek.

Nézzük meg most, hogy hogyan függ a szökési sebesség a bolygó sugarától! Ugyebár a kérdésben szereplő bolygóra pont v_0 kell legyen a szökési sebesség, vagyis $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{8}{3}G\pi\varrho r^2}$, ahol az utóbbi alakban kifejeztük a tömeget a sugárral és a sűrűséggel ($M = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho$). Átírva a kapott formulát kifejezhető a sugár:

$$r = \sqrt{\frac{3}{8}v_0^2\frac{1}{G\pi\varrho}}. \tag{27}$$

Ebbe a kifejezésbe be kell helyettesítsük a Föld sűrűségét, amit annak tömegéből és sugarából számíthatunk ki, az eredmény: $\varrho_\oplus = 5513\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Ezt beírva megkapjuk a keresett bolygó sugarát: **7976 m**. Ellenőrizhetjük is a kapott eredményt: beírva a képletbe a földi szökési sebességet, jó közelítéssel meg fogjuk kapni a Föld sugarát.

Megjegyzés: láthatjuk, hogy a kis herceg bolygóját földi sűrűségűnek feltételezve arról is bőven el lehetne dobni így egy követ.