Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2016-17
1. Gravitáció, égi mechanika
Tanári jegyzet

Dálya Gergely, Csörnyei Géza, Bécsy Bence

1. Tematika

- Newton féle gravitációs törvény
- Kozmikus sebességek
- Kepler törvények
- Kúpszeletek
- Pályaelemek
- Speciális pályák (geostacionárius, geoszinkron, stb.)
- Schwarzschild-sugár
- Pályamenti sebesség
- Kepler-egyenlet

2. Newton féle gravitációs törvény

Egy m tömegű testre ható erő egy tőle r távolságban lévő M tömegű test hatására:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{1}$$

$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Nagyon kicsi. Példa: egymástól 1 méterre lévő 1kg-os tömegek. $F = G(1\ \mathrm{kg}1\ \mathrm{kg})/((1\ \mathrm{m})^2) = 6,67 \times 10^{-11}$ N. Nagy méretekesetén jelentős csak amikor már szinte minden más erővel szemben domináns lesz. (Töltések kiátlagolódása, tömeg összeadódása.)

Mekkora erővel hat a Nap a Földre?

$$F = G\frac{mM}{r^2} = G\frac{m_\oplus m_\odot}{r_\oplus^2} = 3,56 \times 10^{22}\ \mathrm{N} \tag{2}$$

$m_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg
$m_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
$r_\oplus = 1,5 \times 10^{11}$ m
Példák: B.4. feladat

3. Kozmikus sebességek

1. kozmikus sebesség (körsebesség): Az a legkisebb sebesség, amely ahhoz szükséges, hogy egy űreszköz egy égitest körüli körpályára álljon.

Szemléltetés: Ágyúval kilövünk golyókat egyre nagyobb sebességgel. Így egyre messzebb mennek, majd egy adott sebességnél már az egész bolygót megkerülik és hátba találják a tűzszerészt.

Kiszámítása: Körpályán való mozgás feltétele, hogy a testre ható erő megegyezzen a centripetális erővel:

$$F_g = F_{cp} \tag{3}$$

Beírva a gravitációs és centripetális erők képletét:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{4}$$

Átalakítva kapjuk, hogy:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{5}$$

2. kozmikus sebesség (szökési sebesség): Az az elméleti küszöbsebesség, amelyet megszerezve egy űreszköz a legkisebb energiájú elszakadási pályára, egy parabolapályára tud állni, elszakadva a Föld vagy más égitest gravitációjától.

Szemléltetés: Előző ágyús ábra folytatása.

Kiszámítás: Ez éppen akkor lesz amikor az űreszköz energiája éppen nulla. Ha ennél nagyobb energiája lenne, akkor már hiperbola pálya lenne, ha ennél kisebb, akkor pedig ellipszispálya.

Tehát $E_{tot} = 0$ és tudjuk, hogy a teljes energia az alábbi módon fejezhető ki

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} \tag{6}$$

Ezt kell tehát nullával egyenlővé tennünk. Így kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r} \tag{7}$$

Egyszerűsítve m-mel és átrendezve:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{8}$$

Vegyük észre, hogy az első és második kozmikus sebességek között a $v_{II} = \sqrt{2} v_I$ összefüggés van.

3. és 4. kozmikus sebesség: Szokás még értelmezni 3. és 4. kozmikus sebességeket is. Ezek is szökési sebesség jellegű mennyiségek. A 3. kozmikus sebesség a Naprendszer, a 4. pedig a Tejútrendszer elhagyásához szükséges sebesség. Tényleges értékeiket az előzőhöz hasonló módon számolhatjuk ki.

4. Schwarzschild-sugár

A szökési sebesség képletét tanulmányozva láthatjuk, hogy előfordulhat olyan, hogy egy égitest felszínén a szökési sebesség eléri a fénysebességet. Az ilyen égitesteket fekete lyukaknak nevezzük, mivel így még a fény sem tud elszökni róla. Ez azért van, mert a relativitáselmélet értelmében semmi nem haladhat gyorsabban a fénysebességnél.

Egy adott M tömegű testre meghatározhatjuk, hogy mekkora sugarú kéne legyen, hogy fekete lyukká váljon. Ezt a sugarat Schwarzschild-sugárnak nevezzük és az alábbi képlettel számolható:

$$r_{\mathrm{s}} = \frac{2GM}{c^2} \tag{9}$$

Ez a képlet éppen abból a feltételből következik, hogy a szökési sebességet egyenlővé tettük a c fénysebességgel. Kiszámolható így például egy ember Schwarzschild-sugara is. $<$— Hf.

5. Pályamenti sebesség

Szeretnénk meghatározni, hogy egy kúpszelet alakú pályán haladó égitestnek a pálya mely szakaszán mekkora a sebessége. Ehhez induljunk ki az égitest teljes energiájának megmaradásából:

$$\frac{m}{2} v^2 - \frac{GMm}{r} = \text{áll} = E \tag{10}$$

Látjuk, hogy mindkét tagban szerepel az égitest m tömege, ezért érdemes inkább az ún. tömegegységre jutó energiát, amit ε-nal jelölünk. Így ezt kapjuk:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{r} \tag{11}$$

Ezt most a pericentrumra (r_p) és az apocentrumra (r_a) felírva és átrendezve kapjuk, hogy:

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{v_p^2}{2} = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p} \tag{12}$$

Ezen kívül használjuk ki a perdületmegmaradást (impulzusmomentum-megmaradás) is. A perdület képlete $L = mrvsin(\alpha)$, ahol α a sebesség és a rádiuszvektor között bezárt szög. Mivel mi az apocentrumra és a pericentrumra szeretnénk felírni a képleteket, ahol a sebességek merőlegesek a rádiuszokra, ezért a képlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$r_p v_p = r_a v_a \tag{13}$$

Fejezzük ki innen v_p-t:

$$v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a \tag{14}$$

Ezt beírva az energiamegmaradás képletébe:

$$GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) = \frac{v_a^2}{2}\left(1 - \frac{r_a^2}{r_p^2}\right) \tag{15}$$

Ezt átrendezve és beírva, hogy a $2a = r_p + r_a$, ahol a a fél-nagytengely:

$$\frac{v_a^2}{2} = GM\frac{2a - r_a}{r_a 2a} \tag{16}$$

Ezt visszaírva az egységnyi tömegre jutó energia képletébe:

$$\varepsilon = \frac{v_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a} = GM\frac{2a - r_a - 2a}{r_a 2a} \tag{17}$$

Innen kapjuk, hogy a tömegegységre jutó energia csak a félnagytengelytől és a központi égitest tömegétől függ, az alábbi módon:

$$\varepsilon = -\frac{GM}{2a} \tag{18}$$

Így tehát felírhatjuk, hogy:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \tag{19}$$

Ezt v^2-re átrendezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{20}$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy bár mi csak ellipszisre vezettük le ezt az összefüggést, de ez igaz lesz minden kúpszelet alakú pályára (hiperbolánál negatív fél-nagytengely konvenciót használva).

6. Kepler-egyenlet

(Erősen hiányos)

$$E - \varepsilon \sin E = M = n(t - \tau) \tag{21}$$

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - \varepsilon) \\ y &= b \sin E \end{aligned} \tag{23}$$