Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia Szakkör 2015-16
1. Gravitáció, égi mechanika
Tanári jegyzet

Bécsy Bence, Dálya Gergely

1. Tematika

- Newton-féle gravitációs törvény
- Kozmikus sebességek
- Kepler-törvények
- Kúpszeletek
- Pályaelemek
- Speciális pályák (geostacionárius, geoszinkron, stb.)
- Schwarzschild-sugár
- Pályamenti sebesség
- Kepler-egyenlet

2. Newton-féle gravitációs törvény

Egy m tömegű testre ható erő egy tőle r távolságban lévő M tömegű test hatására:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{1}$$

$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Nagyon kicsi. Példa: egymástól 1 méterre lévő 1kg-os tömegek. $F = G(1\ \mathrm{kg}1\ \mathrm{kg})/((1\ \mathrm{m})^2) = 6,67 \times 10^{-11}$ N. Nagy méretek esetén jelentős csak, amikor már szinte minden más erővel szemben domináns lesz. (Töltések kiátlagolódása, tömeg összeadódása.)

Mekkora erővel hat a Nap a Földre?

$$F = G\frac{mM}{r^2} = G\frac{m_\oplus m_\odot}{r_\oplus^2} = 3,56 \times 10^{22}\ \mathrm{N} \tag{2}$$

$m_\oplus = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$m_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg
$r_\oplus = 1,5 \cdot 10^{11}$ m
Példák: B.4. feladat

3. Kozmikus sebességek

1. kozmikus sebesség: Az a legkisebb sebesség, amely ahhoz szükséges, hogy egy űreszköz egy égitest körüli körpályára álljon.

Szemléltetés: Ágyúval kilövünk golyókat egyre nagyobb sebességgel. Így egyre messzebb mennek, majd egy adott sebességnél már az egész bolygót megkerülik és hátba találják a tűzszerészt.

Kiszámítása: Körpályán való mozgás feltétele, hogy a testre ható erő megegyezzen a centripetális erővel:

$$F_g = F_{cp} \tag{3}$$

Beírva a gravitációs és centripetális erők képletét:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{4}$$

Átalakítva kapjuk, hogy:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{5}$$

Az 1. kozmikus sebesség értéke a Földön: $7,91$ km/s. Az előbbi számításban azonban nem vettük figyelembe, hogy a Föld forgása miatt a rakétának eleve van egy kezdősebessége. Ez a sebesség az Egyenlítőnél a legnagyobb és a sarkokon nulla az értéke. Ezért van pl. az ESA űrközpontja Francia Guyana-n (Kourou) és nem Európában, ill. ezért használja a NASA a Cape Canaveral-ban (Florida) lévő Kennedy Űrközpontot. Ha pontosan az Egyenlítőről bocsátanak fel egy űreszközt, az eleve 0,46 km/s-os kezdősebességet kap.

2. kozmikus sebesség (szökési sebesség): Az az elméleti küszöbsebesség, amelyet megszerezve egy űreszköz a legkisebb energiájú elszakadási pályára, egy parabolapályára tud állni, elszakadva a Föld vagy más égitest gravitációjától.

Szemléltetés: Előző ágyús ábra folytatása.

Kiszámítás: Ez éppen akkor lesz amikor az űreszköz energiája éppen nulla. Ha ennél nagyobb energiája lenne, akkor már hiperbola pálya lenne, ha ennél kisebb, akkor pedig ellipszispálya.

Tehát $E_{tot} = 0$ és tudjuk, hogy a teljes energia az alábbi módon fejezhető ki

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} \tag{6}$$

Ezt kell tehát nullával egyenlővé tennünk. Így kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r} \tag{7}$$

Egyszerűsítve m-mel és átrendezve:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{8}$$

Vegyük észre, hogy az első és második kozmikus sebességek között a $v_{II} = \sqrt{2}v_I$ összefüggés van. A Föld esetében a második kozmikus sebesség értéke 11,2 km/s. Az első ember készítette tárgy, amely elérte ezt a sebességet, a szovjet Luna-1 űrszonda volt, 1959-ben.

3. és 4. kozmikus sebesség: Szokás még értelmezni 3. és 4. kozmikus sebességeket is. Ezek is szökési sebesség jellegű mennyiségek. A 3. kozmikus sebesség a Naprendszer, a 4. pedig a Tejútrendszer elhagyásához szükséges sebesség. Tényleges értékeiket az előzőhöz hasonló módon számolhatjuk ki. A 3. kozmikus sebesség értéke 42,3 km/s, az első ember készítette tárgy, amely elérte ezt a sebességet, az amerikai Pioneer-10 űrszonda volt, amely 1972-ben indult útnak.

4. Kepler-törvények

Az égitestek mozgásának 3 alapvető törvénye. Kepler Tycho Brahe méréseiből kapta meg őket (a korszak legpontosabb csillagászati mérései). Levezethetőek belőlük Newton törvényei is.

Kepler I. törvénye: A bolygók pályája ellipszis, amelynek egyik gyújtópontjában van a Nap.

Kepler II. törvénye: A bolygók vezérsugara (a bolygó és a Nap között húzott egyenes) egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol, vagyis a területi sebesség állandó. Ez azt jelenti, hogy a bolygók napközelben (perihélium) gyorsabban mozognak, mint naptávolban (aphélium).

Kepler III. törvénye: A bolygópályák fél nagytengelyeinek köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei. Képelettel: a^3/T^2 =áll. Ha a fél nagytengelyt csillagászati egységekben (CsE, AU, a Föld és a Nap közötti átlagos távolság), a keringési időt években számoljuk, akkor az állandó értéke 1 (ld. a Föld adatait beírva).

A Kepler-törvények általánosítása: nem csak a Nap körül keringő bolygókra jók, hanem bármilyen égitest körül keringő másik égitestre. A III. törvény használatával vigyázni kell: az állandó értéke más és más lesz különböző tömegű vonzócentrum használatakor. A törvény általános alakja:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{9}$$

Levezetés:

5. Kúpszeletek

Kéttest-probléma: határozzuk meg két tömegpont mozgását, ha azok csak egymással hatnak kölcsön. Mivel a Nap gravitációs hatása pl. a Földre jóval nagyobb más bolygóknak a Földre gyakorolt hatásánál, így jó közelítéssel tekinthetjük a bolygómozgásokat is kéttest-problémának. A pontosabb pályaszámítási módszerek (perturbációszámítás) is ebből indul ki.

A kéttest-probléma megoldásaként az jön ki, hogy az égitestek kúpszelet alakú pályákon mozoghatnak. A kúpszeletek a következők (rajz a táblára, hogy hogyan is szeljük el a kúpot):

1. Kör
   Egy ponttól azonos távolságra lévő pontok halmaza. Egyetlen paraméter jellemzi: sugár (r). Kerület: $2r\pi$. Terület: $r^2\pi$.

2. Ellipszis
   Olyan pontok halmaza, amelyeknek két ponttól vett távolságainak összege állandó ($2a$). Két paraméterrel jellemezhetjük, pl. fél nagytengely és excentricitás. A bevezetett paraméterei a következők (ábra a táblára):

   - fél nagytengely (a)
   - fél kistengely (b)
   - lineáris excentricitás (c): a középpont és a fókuszpont távolsága. $a^2 = b^2 + c^2$
   - (numerikus) excentricitás (e): $e = c/a$ Megj.: ez a körre 0.

   Hasznos összefüggés: a fókuszpont feletti pontnak a fókuszponttól való távolsága (semilatus rectum): b^2/a.
   Az ellipszis területe: $ab\pi$. A kerülete nem fejezhető ki ilyen egyszerűen (zárt alakban), csak egy végtelen sorozat tagjainak összegeként.

3. Parabola
   Azon pontok mértani helye a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól (fókuszpont) és egy ezen át nem haladó egyenestől (vezéregyenes). Felfogható egy olyan ellipszisként is, amelynek egyik fókuszpontja a végtelenben van, így az excentricitása $e = 1$.

4. Hiperbola
   Azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek a két fókuszponttól való távolságuk különbségének abszolút értéke állandó. Másik definíció: Azon pontok halmaza, amelyeknek egy adott ponttól való távolságának és egy egyenestől való távolságának a hányadosa állandó és nagyobb 1-nél. Ez az állandó lesz a hiperbola excentricitása.

Háromtest-probléma:
Három test gravitációs kölcsönhatásban egymással. Hogyan fognak mozogni? Nagyon nehéz megoldani, csak néhány speciális esetben lehet egzaktul kiszámítani a pályát, egyébként csak lépésről lépésre, numerikusan.

Spec. eset: a három égitest azonos síkban helyezkedik el. Ennek stabil megoldásai a Lagrange-pontok vagy librációs pontok: a tér azon öt pontja, amelyben egy kis test két, egymás körül keringő nagyobb test együttes gravitációs vonzásának hatására azokhoz képest közelítőleg nyugalomban maradhat. Az ebben a pontban elhelyezett test helyzete fix marad a másik kettőhöz képest. (pontok helyzetét felrajzolni a táblára)

Miért is itt vannak?

- L_1, L_2 és L_3: A Föld és a Nap együttes gravitációs ereje megegyezik a centripetális erővel (instabilak).
- L_4 és L_5: kicsit bonyolultabb, de stabilak! → trójai és görög kisbolygók (Jupiter és Nap Lagrange-pontjaiban), sok űrtávcső (pl. SOHO, Herschel, WMAP, Planck) érdekes pl. lópatkó alakú pályák

6. Pályaelemek

Egy égitest pontos pályáját 6 paraméter segítségével adhatjuk meg:

1. fél nagytengely (a)
2. excentricitás (e)
3. pályahajlás (i, inklináció): a keringési sík hajlásszöge az alapsíkhoz képest
4. a pericentrum argumentuma (ω): a pericentrum távolsága a felszálló csomótól (az az irány, ahol a kérdéses égitest pályája délről észak felé haladva metszi az alapsíkot); a keringési síkban mérjük, a pericentrum iránya és a felszálló csomó által bezárt (pozitív irányban felvett) szög nagysága
5. a felszálló csomó hossza (Ω): az alapsíkban, az alapirány és a felszálló csomó által bezárt szög nagysága
6. a pericentrum-átmenet időpontja (τ)

A pályaelemekkel az egycentrum-probléma megoldása egyszerűbben fejezhető ki.

7. Speciális pályák

A Föld körül keringő műholdak pályáinak csoportosítása:

- excentricitás alapján: körpálya ill. ellipszispálya
- inklináció alapján: egyenlítői pálya ($i = 0°$), közepes inklinációjú pálya, poláris pálya ($i = 90°$)
- fél nagytengely (pálya magassága) alapján: LEO (Low Earth Orbit: $<$ 2000 km), MEO (2000 km és geoszinkron között), GEO (Geosynchronous Earth Orbit), HEO ($>$ geoszinkron)

Speciális pályák:

- Geoszinkron: periódusideje megegyezik a Föld forgási periódusidejével
- Geostacionárius: olyan geoszinkron, amely az Egyenlítő síkjában kering, így mindig ugyanazon terület felett tartózkodik (B.2. feladat)
- GPS műholdak pályája: a Föld felszíne felett kb. 20.000 km magasan, naponta kétszer kerülik meg a Földet. Eredetileg 24 műhold, jelenleg 31. A Föld minden pontjáról mindig látható legalább 4. A GPS műholdak pontos helymeghatározásához az általános relativitáselmélet miatt fellépő korrekciókat is figyelembe kell venni, vagyis mindig amikor a GPS-szel meghatározzuk a helyzetünket, bebizonyítjuk az általános relativitáselmélet helyességét.
- Molnyija-pálya: nagy excentricitású pálya, nagy apogeum-távolsággal, amely mindig azonos földrajzi hely felett van. A szovjetek használták, mivel a geostacionárius műholdak nagy szélességekről már nem igazán láthatóak, viszont a Molnyija-pályán lévő műhold keringési idejének java részét az apogeum környékén töltve közel ugyanonnan látszik, így helyettesítheti a geostacionárius műholdakat. Speciális esete a Tundra-pálya, aminek a periódusideje 1 nap és mindössze 2 ilyen pályán keringő műhold elegendő a 24 órás lefedettséghez.

Égi mechanikai paradoxon: gyorsítás után egy keringő test sebessége csökken, lassítás után megnő. Oka: nézzük meg körpályára. Ekkor a test összenergiája:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}. \tag{10}$$

Tudjuk, hogy a körsebesség $v = \sqrt{GM/r}$, ezt visszaírva a fenti képletbe:

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}, \tag{11}$$

vagyis láthatjuk, hogy a testre $E \sim -\frac{1}{r}$ és $v \sim r^{-1/2}$. Tehát ha fékezünk, csökken az összenergia, de emiatt a pályasugár is csökken. Ha pedig a sugár csökken, a keringési sebesség nő! Hasonlóan: ha nő az összenergia, nő a pályasugár és csökken a keringési sebesség.

Ennek egyik példája a Naprendszerben a Poynting–Robertson-effektus: a Nap körül keringő kis testekre a sugárnyomás az aberráció miatt nem csak radiálisan hat, így a test energiája csökken, ezzel a sugara is, a sebessége pedig nő.

Mozgás a bolygóközi térben:
Az űrszondák vagy a leggyorsabban vagy a legkevesebb üzemanyag felhasználásával akarnak a céljukhoz érni, így néhány speciális pályát szoktak használni.

Hohmann-ellipszis: egy körpályáról egy külső körpályára álláshoz. Nagyon optimális az energiafogyasztása, viszont csak bizonyos ún. indítási ablakokban lehet így indítani a Földről más bolygókra. Ezek általában néhány hetes időszakok, amelyek pl. a Mars esetében 2 évente követik egymást.

Van azonban még ennél is üzemanyag-hatékonyabb megoldás, de az sokkal lassabb.

Gravitációs hintamanőver: Az űrhajó valamilyen nagy tömegű égitest közelében halad el, és sebessége megnő a gravitációs térből nyert impulzusmomentum révén. Ugyanezzel a módszerrel csökkenteni is lehet a sebességet. Ezt az effektust a távolabbi bolygók felé induló küldetések esetében mindig kihasználják, így is üzemanyagot lehet spórolni.

8. Schwarzschild-sugár

A szökési sebesség képletét tanulmányozva láthatjuk, hogy előfordulhat olyan, hogy egy égitest felszínén a szökési sebesség eléri a fénysebességet. Az ilyen égitesteket fekete lyukaknak nevezzük, mivel így még a fény sem tud elszökni róla. Ez azért van, mert a relativitáselmélet értelmében semmi nem haladhat gyorsabban a fénysebességnél.

Egy adott M tömegű testre meghatározhatjuk, hogy mekkora sugarú kéne legyen, hogy fekete lyukká váljon. Ezt a sugarat Schwarzschild-sugárnak nevezzük és az alábbi képlettel számolható:

$$r_{\mathrm{s}} = \frac{2GM}{c^2} \tag{12}$$

Ez a képlet éppen abból a feltételből következik, hogy a szökési sebességet egyenlővé tettük a c fénysebességgel. Kiszámolható így például egy ember Schwarzschild-sugara is. <— Hf.

9. Pályamenti sebesség

Szeretnénk meghatározni, hogy egy kúpszelet alakú pályán haladó égitestnek a pálya mely szakaszán mekkora a sebessége. Ehhez induljunk ki az égitest teljes energiájának megmaradásából:

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} = \text{áll} = E \tag{13}$$

Látjuk, hogy mindkét tagban szerepel az égitest m tömege, ezért érdemes inkább az ún. tömegegységre jutó energiát, amit ε-nal jelölünk. Így ezt kapjuk:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} \tag{14}$$

Ezt most a pericentrumra (r_p) és az apocentrumra (r_a) felírva és átrendezve kapjuk, hogy:

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{v_p^2}{2} = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p} \tag{15}$$

Ezen kívül használjuk ki a perdületmegmaradást (impulzusmomentum-megmaradás) is. A perdület képlete $L = mrvsin(\alpha)$, ahol α a sebesség és a rádiuszvektor között bezárt szög. Mivel mi az apocentrumra és a pericentrumra szeretnénk felírni a képleteket, ahol a sebességek merőlegesek a rádiuszokra, ezért a képlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$r_p v_p = r_a v_a \tag{16}$$

Fejezzük ki innen v_p-t:

$$v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a \tag{17}$$

Ezt beírva az energiamegmaradás képletébe:

$$GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) = \frac{v_a^2}{2}\left(1 - \frac{r_a^2}{r_p^2}\right) \tag{18}$$

Ezt átrendezve és beírva, hogy a $2a = r_p + r_a$, ahol a a fél-nagytengely:

$$\frac{v_a^2}{2} = GM\frac{2a - r_a}{r_a 2a} \tag{19}$$

Ezt visszaírva az egységnyi tömegre jutó energia képletébe:

$$\varepsilon = \frac{v_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a} = GM\frac{2a - r_a - 2a}{r_a 2a} \tag{20}$$

Innen kapjuk, hogy a tömegegységre jutó energia csak a félnagytengelytől és a központi égitest tömegétől függ, az alábbi módon:

$$\varepsilon = -\frac{GM}{2a} \tag{21}$$

Így tehát felírhatjuk, hogy:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \tag{22}$$

Ezt v^2-re átrendezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{23}$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy bár mi csak ellipszisre vezettük le ezt az összefüggést, de ez igaz lesz minden kúpszelet alakú pályára (hiperbolánál negatív fél-nagytengely konvenciót használva).

10. Kepler-egyenlet

(Erősen hiányos)

$$E - \varepsilon \sin E = M = n(t - \tau) \tag{24}$$

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - \varepsilon) \\ y &= b \sin E \end{aligned} \tag{26}$$