Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2014/2015
1. Gravitáció, égi mechanika
Megoldások

Dálya Gergely, Bécsy Bence

1. Bemelegítő feladatok

B.1. feladat

Ahhoz, hogy meghatározzuk az Uránusz pályájának fél nagytengelyét, a legkézenfekvőbb megoldás Kepler III. törvényének használata. A törvény szerint a bolygók a Nap körül olyan ellipszispályán keringenek, amelyre a fél nagytengely és a keringési idő közötti reláció a következő:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{áll.} \tag{1}$$

Ha a fél nagytengelyt csillagászati egységekben (a továbbiakban CsE vagy AU) mérjük, a keringési időt pedig években, akkor az állandó értéke 1 lesz (a Nap körül keringő égitestekre alkalmazva), ezt legegyszerűbben a Föld adatainak behelyettesítésével láthatjuk. Az egyenletet átrendezve $a = T^{2/3}$-t kapunk, ahova behelyettesítve az Uránusz keringési idejét (84 év) megkapjuk a megoldást: $\mathbf{a = 19,18}$ CsE.

B.2. feladat

A geostacionárius műholdak stabil körpályán keringenek a Föld körül, így a rájuk ható erőknek, vagyis a Föld gravitációs erejének és a centripetális erőnek az eredője zérus:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{GM\frac{T^2}{4\pi^2}} = 42.227 \text{ km.} \tag{2}$$

Mivel azonban a keringés középpontja a Föld középpontja és nem a felszíne, így ahhoz, hogy a felszíntől vett távolságot kapjuk meg, ebből még le kell vonnunk a Föld sugarát (6371 km). Tehát a geostacionárius műholdak a Föld felszíne felett **35.856 km**-rel keringenek.

B.3. feladat

Használjuk a B.1. feladatban is alkalmazott módon Kepler III. törvényét: $T = a^{3/2} = 75,1$ év. Mivel legutóbb 1986-ban volt perihéliumban, a legközelebbi ilyen esemény **2061**-ben várható.

A perihéliumtávolságot megkaphatjuk úgy, hogy az ellipszis fél nagytengelyéből kivonjuk a lineáris excentricitást (az ellipszis középpontja és fókuszpontja közötti távolságot, jelöljük c-vel). A lineáris excentricitást pedig a fél nagytengely és a (numerikus) excentricitás szorzataként számíthatjuk ki, vagyis $c = ae = 17,21$ CsE. A perihéliumtávolság tehát $\mathbf{r_p = a - c = 0,587}$ **CsE**.

B.4. feladat

A gravitációs gyorsulás értékét legegyszerűbben Newton II. törvényének felírásával kaphatjuk meg:

$$F = ma = mg = G\frac{mM}{r^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}. \tag{3}$$

Behelyettesítve az egyes égitestek tömegeit és sugarait:

- $\mathbf{g_H = 1,62\ \frac{m}{s^2}}$
- $\mathbf{g_V = 8,87\ \frac{m}{s^2}}$
- $\mathbf{g_J = 25,93\ \frac{m}{s^2}}$
- $\mathbf{g_\odot = 273,77\ \frac{m}{s^2}}$

2. Nehezebb feladatok

N.1. feladat

1. rész

Ahhoz, hogy a műholdnak perigeuma legyen az adott pontban az kell, hogy ne adjunk sugár irányban sebességet neki, és hogy a sebességének nagyságát növeljük (ha csökkentenénk akkor apogeum lenne).

Így tehát az új pálya r_p pericentrumtávolsága megegyezik az r_gst geostacionárius pályasugárral. Tudjuk továbbá, hogy:

$$r_\mathrm{p} = a(1-e), \tag{4}$$

ahol a a pálya fél nagytengelye, e pedig az excentricitása.

Így csak az a fél nagytengelyt kell úgy beállítanunk, hogy az adott r_p esetén e excentricitású legyen. Ehhez azt kell tudnunk, hogy az ellipszispályán mozgó részecske redukált energiáját egyértelműen meghatározza a fél nagytengely az alábbi összefüggésen keresztül:

$$\frac{E}{m} = -\frac{GM}{2a} \tag{5}$$

Továbbá tudjuk, hogy a műholdunk teljes redukált energiája:

$$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}} \tag{6}$$

A kettőt egyenlővé téve, az excentricitásos képletet beírva és rendezve kapjuk, hogy a sebességet az alábbira kell beállítani:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}(1+e)} \tag{7}$$

Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha a jelenlegi sebességével azonos irányban megnöveljük a sebességét az alábbi értékkel:

$$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}}\left(\sqrt{(1+e)} - 1\right)} \tag{8}$$

<u>2. rész</u>
Lényegében ugyanaz mint az első rész, csak mivel apogeumban vagyunk, ezért az excentricitást az alábbi képlet adja:

$$r_{\mathrm{a}} = (1+e)a \tag{9}$$

Így látható, hogy mindenhol megváltozik az e előjele, így a végeredmény az, hogy az alábbi sebességet kell adnunk a már meglévő sebességhez:

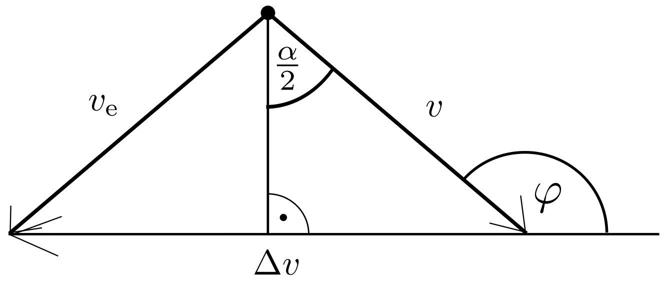
$$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}}\left(\sqrt{(1-e)} - 1\right)} \tag{10}$$

Ez lényegében egy lassítás lesz.
<u>3. rész</u>
Bármelyik korábbi végképletben $e = 1$-et írva megkapjuk a megoldást, ami az alábbi:

$$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{gst}}}}\left(\sqrt{2} - 1\right)} \tag{11}$$

Azonban tartsuk észben, hogy ez csak a legegyszerűbb megoldás. Bármilyen megfelelő nagyságú, a Föld irányához képest merőleges sebességű eset jó lesz.
<u>4. rész</u>
Az egyik feltételünk itt az, hogy körpályán maradunk. Ezt úgy tudjuk teljesíteni, hogy a sebesség nagyságát nem változtatjuk és irányát is csak úgy, hogy ne legyen radiális komponense.

A 1. ábrát megnézve ez az alábbi módon teljesíthető. Legyen a hozzáadott sebesség nagysága $\boldsymbol{\Delta v = 2v\sin(\frac{\alpha}{2})}$, ahol α a kezdeti és eredő sebességek által bezárt szög. Legyen a Δv és a v által bezárt szög φ. Ekkor a v_{e} eredő sebesség $\boldsymbol{\alpha = 2\varphi - 180°}$szöget zár be a v eredeti sebességgel.
<u>5. rész</u>
Itt csak egy v-vel megegyező nagyságú sebességet kell kivonnunk v-ből, azaz meg kell állítanunk a pályáján a műholdat. Természetesen eközben adhatunk neki egy tetszőleges sugárirányú sebességet.
<u>6. rész</u>



1. ábra

Ez a feladat lényegében ugyanaz, mint a 4. rész, csak i-t egyenlővé kell tenni α-val, hiszen a geoszinkron pálya ugyanolyan mint a geostacionárius csak el van ahhoz képest fordulva.

N.2. feladat

Schwarzschild-sugárnak nevezzük azt a fekete lyuk közepétől mért távolságot, ahol a szökési sebesség a fénysebesség. A szökési sebesség képletét felírva:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{2GM}{c^2} \tag{12}$$

Behelyettesítve a fekete lyuk tömegét ($M = 4 \cdot 10^6\ M_\odot \simeq 7,956 \cdot 10^{36}$ kg), a következő értéket kapjuk a Schwarzschild-rádiuszra: $\mathbf{R = 1,18 \cdot 10^{10}\ m}$.

Az átlagos sűrűség kiszámításához tételezzük fel gömb alakúnak a fekete lyukat! Ekkor a térfogata $V = \frac{4}{3}R^3\pi = 6,87 \cdot 10^{30}$ m^3, így sűrűsége: $\boldsymbol{\varrho = \frac{M}{V} = 1,16 \cdot 10^6 \frac{kg}{m^3}}$.

Megjegyzés: Ez a sűrűségérték ugyan elég nagy, kb. ezerszer akkora, mint a vízé, azonban ahogy nő a fekete lyuk tömege, igen gyorsan csökken a sűrűsége, ugyanis:

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\frac{8G^3M^3}{c^6}} \sim \frac{1}{M^2}, \tag{13}$$

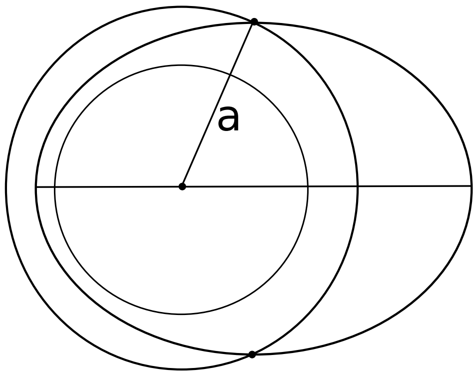
vagyis a sűrűség a tömeg második hatványával fordítottan arányos; a nagyobb fekete lyukak sűrűsége tehát igen kicsi.

N.3. feladat

Az excentricitás kiszámításához használjuk a már ismert összefüggéseket a fél nagytengely, a fél kistengely és a lineáris excentricitás között: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5$ CsE, ahonnan a (numerikus) excentricitás: $\boldsymbol{e = \frac{a}{c} = 0,385}$. A periasztrontávolság pedig: $\boldsymbol{r_p = a - c = 8}$ **CsE**.

N.4. feladat

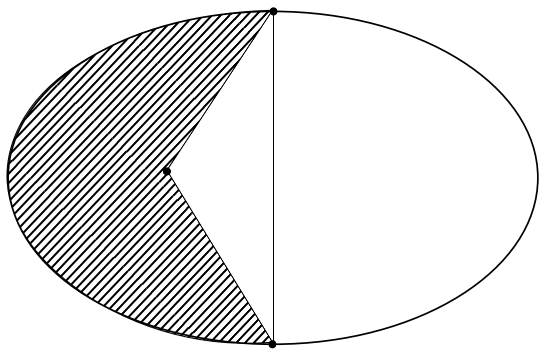
Nézzük meg, hogy a pályaellipszis mely részei esnek a lakhatósági zónába! Tudjuk a feladat szövegéből, hogy a lakhatósági zóna külső határa egybeesik a fél nagytengellyel. Az ellipszis definíció szerint olyan pontok halmaza a síkon, amelyeknek a két fókuszponttól mért távolságösszege állandó. Ez az állandó pedig éppen $2a$ (ha ezt nem tudjuk, számítsuk ki a pericentrumra vagy az apocentumra). Az ellipszisen annak középpontja feletti és alatti pont (ld. 2. ábra) emiatt éppen a távolságra lesz mindkét fókusztól, hiszen szimmetrikus az ellipszis, és $2a/2 = a$. Tehát azt már tudjuk, hogy ezen két ponton metszi a lakhatósági zóna külső köre az ellipszist.



2. ábra

Vajon hol metszi a belső kör? Ellenőrizzük először, hogy metszi-e egyáltalán. Az ellipszisnek a fókuszhoz legközelebbi pontja a pericentum, aminek a távolsága: $r_\mathrm{p} = a - c = a(1-e) = 3,2$ CsE, ez tehát a lakhatósági zónán belül van. A kérdés tehát az, hogy az ellipszisnek a pericentrumhoz közelebbi felét a keringési idő hányad része alatt teszi meg a bolygó. Mivel itt gyorsabban halad Kepler II. törvénye miatt, 50%-nál kisebb értéket várunk.

Kepler II. törvénye kimondja, hogy a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Használjuk ki ezt! Így csak a 3. ábrán látható bevonalkázott területet kell összehasonlítani az ellipszis teljes területével. A teljes terület: $T = ab = 15,68$ CsE^2. A háromszög területe (alapja $2b$, magassága c): $T_h = \frac{2bc}{2} = bc = 3,14$ CsE^2. Innen pedig a vonalkázott terület: $T_v = \frac{T}{2} - T_h = 4,7$ CsE^2. Ez pedig az eredeti területnek **30%**-a.



3. ábra

N.5. feladat

A bolygó és a csillag a közös tömegközéppont körül keringenek. A csillag távolsága a tömegközépponttól: $x = 4\ \mathrm{CsE}\frac{m}{M} = 4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{CsE} = 6020$ km. Megjegyezzük, hogy ez bőven a csillag sugarán belül van, tehát a csillagot nem fogjuk valóban körpályán keringőnek látni, hanem csak imbolyogni fog. A csillagot az alábbi szöggel látjuk elmozdulni (a 15 fényévet átváltottuk kilométerbe):

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{6020\ \mathrm{km}}{1,42 \cdot 10^{14}\ \mathrm{km}}\right) \simeq 10^{-5}\ '' \tag{14}$$

Tehát a csillag modulációja $\mathbf{10^{-5}}$ **ívmásodperc**. Mivel a bolygó körpályán kering a csillag körül, ezért ez a moduláció független a rendszer inklinációjától, vagyis attól, hogy milyen szögben is látunk rá.

N.6. feladat

A feladat megoldásához használjuk a pályamenti sebességképletet, ami bármilyen kúpszelet alakú pálya esetén jó:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{15}$$

Mivel a Föld felszínétől vett távolság van nekünk megadva, ehhez még hozzá kell adjuk a Föld sugarát, ugyanis az egyenletben r a fókuszponttól mért távolság: $r = 326.371$ km lesz így. Az egyenletet átrendezve megkaphatjuk az a paramétert (ami ellipszispályára a fél nagytengely):

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM}} = -1,375 \cdot 10^8\ \mathrm{m}. \tag{16}$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ez azt jelenti, hogy hiperbolapályán halad a rakéta, ami jó, mert el akarjuk hagyni a Földet. A kapott a-t és a második pozíciónak a Föld középpontjától mért távolságát ($r_2 = 6601$ km) beírva a 15. képletbe megkaphatjuk a végeredményt: $\boldsymbol{v_2 = 11,1\frac{km}{s}}$. Látjuk, hogy a Földhöz közelebbi pozícióra helyesen nagyobb sebesség jött ki.

3. Diákolimpiai szintű feladatok

D.1. feladat

A megoldás lényege az a felismerés, hogy a fény véges sebessége miatt a Seneca körül keringő űrszonda jeleiből arról kapunk információt, hogy a kisbolygó milyen távol van a Földtől. Így azt az információt adja meg a feladat szövege, hogy mi a legkisebb és legnagyobb távolság ami a Föld és a Seneca között kialakulhat. Számoljuk ki, hogy a megadott időtartamok mekkora távolságnak felelnek meg:

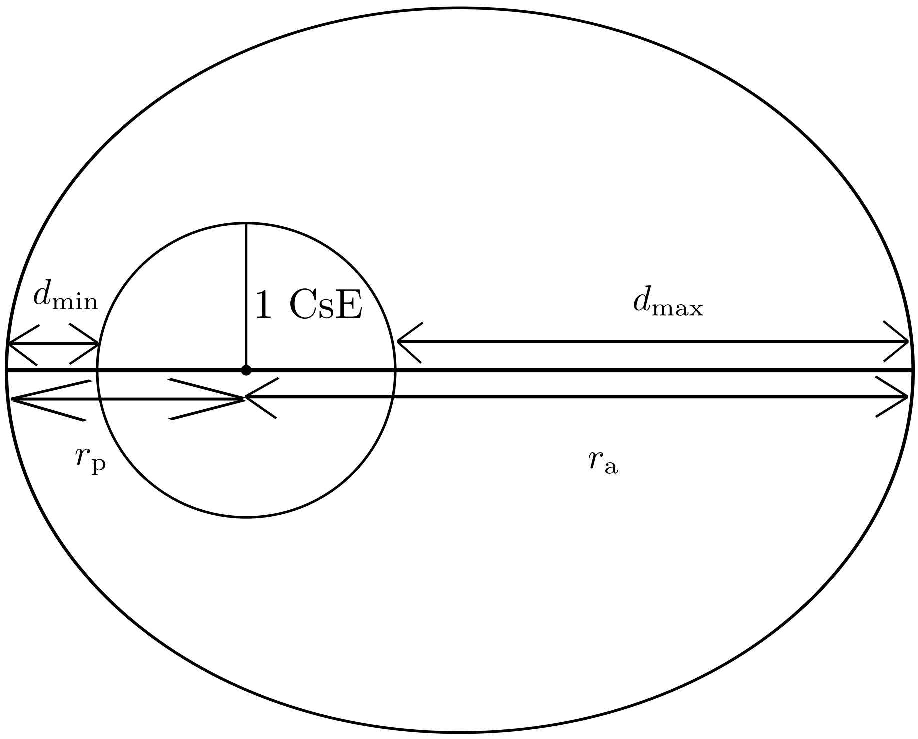
$$d = c\Delta t, \tag{17}$$

ahol d a Seneca távolsága a Földtől, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s a fénysebesség, Δt a rádiójel Földhöz éréséhez szükséges idő. Beírva a feladatban szereplő időket kapjuk, hogy

$$d_{\min} = 0,24 \text{ CsE} \qquad d_{\max} = 4,68 \text{ CsE} \tag{18}$$

(1 CsE$= 1,5 \cdot 10^{11}$ m)

Ezek alapján a Seneca ellipszispályáját a Föld körpályájához képest fel lehet rajzolni. Ehhez vegyük észre, hogy a Seneca pályája nem metszheti a Föld pályáját, mivel ekkor kialakulhatna olyan helyzet amikor gyakorlatilag 0 perc alatt eléri a Földet a jel. Az pedig, hogy a Seneca pályája a Föld pályáján belül helyezkedjen el azért nem lehetséges, mert a legnagyobb távolság esetén (4,68 CsE) messzebb van a Földtől, mint a Föld pályasugarának kétszerese (2 CsE). Ezért tehát arra jutunk, hogy a Seneca pályája a Földpályán kívül helyezkedik el (lásd 4. ábrát).



4. ábra

Az ábra alapján kifejezhetjük a Seneca pályájának pericentrumtávolságát (r_{p}) és apocentrumtávolságát (r_{a}) a $d_{\min}$ és $d_{\max}$ értékeivel az alábbi módon:

$$r_{\mathrm{p}} = d_{\min} + 1 \text{ CsE} \qquad r_{\mathrm{a}} = d_{\max} - 1 \text{ CsE} \tag{19}$$

$$r_{\mathrm{p}} = 1,24 \text{ CsE} \qquad r_{\mathrm{a}} = 3,68 \text{ CsE} \tag{20}$$

Ezután szeretnénk meghatározni a Seneca pályájának a fél nagytengelyét és e excentricitását. Ezt a közel- és távolpontok ismeretében az alábbi összefüggésekkel tehetjük meg:

$$a = \frac{r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}}}{2} \tag{21}$$

$$e = 1 - \frac{r_\mathrm{p}}{a} \tag{22}$$

Így a Senecára az alábbi értékeket kapjuk:

$$\mathbf{a = 2,46\ CsE} \qquad \mathbf{e = 0,496} \tag{23}$$

A fél nagytengely ismeretében a pályaperiódust Kepler III. törvénye alapján számolhatjuk ki, ami a Naprendszerre az alábbi alakú, ha csillagászati egységben és évben számolunk:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \tag{24}$$

Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{T = 3,86\ év} \tag{25}$$

A két oppozíció között eltelt időt úgy kaphatjuk meg, ha kiszámoljuk a Seneca és a Föld relatív átlagos szögsebességét:

$$\omega_\mathrm{rel} = \omega_\mathrm{F} - \omega_\mathrm{S} \tag{26}$$

Beírva, hogy az átlagos szögsebesség $\omega = 2\pi/T$, ahol T a keringési idő és az egész egyenletet 2π-vel osztva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{T_\mathrm{sid}} = \frac{1}{T_\mathrm{F}} - \frac{1}{T_\mathrm{S}} \tag{27}$$

Innen a T_sid sziderikus keringési időre az alábbi képletet kapjuk:

$$\frac{1}{\frac{1}{1\ \text{év}} - \frac{1}{3{,}86\ \text{év}}} \tag{28}$$

Innen, mivel ez éppen megegyezik a Δt két oppozíció között eltelt idővel, ezért a végeredmény:

$$\boldsymbol{\Delta t = 1,35\ \text{év}} \tag{29}$$

D.2. feladat

Tegyük fel, hogy egy átlagos ember ugrással a tömegközéppontját kb. 50 cm-rel tudja megemelni. Írjuk fel az energiamegmaradást: $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$, vagyis $v_0 = \sqrt{2gh} = 3,13\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-os volt az elrugaszkodás pillanatában a sebességünk.

Nézzük most meg, hogyan függ a szökési sebesség a bolygó sugarától! Ugyebár a kérdésben szereplő bolygóra pont v_0 kell legyen a szökési sebesség, vagyis $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{8}{3}G\pi\varrho r^2}$, ahol az utóbbi alakban a tömeget kifejeztük a sugárral és a sűrűséggel ($M = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho$). Átírva a kapott formulát, a sugár kifejezhető:

$$r = \sqrt{\frac{3}{8}v_0^2\frac{1}{G\pi\varrho}}. \tag{30}$$

Ebbe a kifejezésbe be kell helyettesítsük a Föld sűrűségét, amit annak tömegéből és sugarából számíthatunk ki, az eredmény: $\varrho_{\mathrm{F}} = 5513\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Ezt beírva megkapjuk a keresett bolygó sugarát: **1783 m**. Ellenőrizhetjük is a kapott eredményt: beírva a földi szökési sebességet, meg fogjuk kapni jó közelítéssel a Föld sugarát.

Megjegyzés: láthatjuk, hogy a kis herceg bolygóját földi sűrűségűnek feltételezve arról is bőven el lehetne szökni egyetlen ugrással.